LISTA 5 – Pochodne cząstkowe. Pochodna kierunkowa. Różniczka funkcji wielu zmiennych.

1. Korzystając z definicji obliczyć pochodne cząstkowe funkcji w podanym punkcie

   (a) $f(x,y) = x + y^2, \qquad (x_0, y_0) = (3,4),$

   (b) $f(x,y) = 2\sqrt{x^2 + y^2}, \qquad (x_0, y_0) = (0,0),$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}, \qquad (x_0, y_0) = (0,0).$

2. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji

   (a) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y},$

   (b) $f(x,y) = e^{x^2 \sin y},$

   (c) $f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2}),$

   (d) $f(x,y) = \arcsin \frac{xy}{x+y},$

   (e) $f(x,y,z) = xyz,$

   (f) $f(x,y,z) = x^{y^z}.$

3. Wyznaczyć pochodne cząstkowe drugiego rzędu dla funkcji z zadania 2(a), 2(c), 2(e).

4. Obliczyć pochodną cząstkową $\frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y^2 \partial z^2}$ funkcji $f(x,y,z) = e^{xy+z}.$

5. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji f w danym punkcie A w kierunku wektora $\overrightarrow{v}$

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy + 1,\ A = (1,2),\ \overrightarrow{v} = (1,0),$

   (b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy + 1,\ A = (1,2),\ \overrightarrow{v} = (0,1),$

   (c) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy + 1,\ A = (1,2),\ \overrightarrow{v} = (3,-1),$

   (d) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2),\ A = (1,1),\ \overrightarrow{v} = (1,1),$

   (e) $f(x,y) = 2|x| + |y|,\ A = (0,0),\ \overrightarrow{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$

6. Pokazać, że funkcja $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } x = y = 0 \end{cases}$ ma w punkcie $(0,0)$ pochodną kierunkową w dowolnym kierunku.

7. Zbadać różniczkowalność funkcji:

   (a) $f(x,y) = 2x + y,$

   (b) $f(x,y) = 2\sqrt{x^2 + y^2}.$

8. Zbadać różniczkowalność funkcji f w punkcie $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } x = y = 0 \end{cases}.$$

9. Napisać równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ w punkcie $A = (1,-1,f(1,-1)),$

   (b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ w punkcie $A = (3,-4,f(3,-4)).$

10. Sprawdzić, czy funkcja

(a) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$,

(b) $f(x,y) = \cos x \cosh y$

spełnia równanie różniczkowe Laplace'a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$